La física en problemes

Salvador Estradé i Jordi Vives

Com s'ha dit en números anteriors, l'objectiu d'aquesta secció de la *Revista* és fomentar l'interès per la física entre els estudiants. Per aconseguir-ho demanem al professorat que faci una àmplia difusió d'aquesta proposta entre l'alumnat i l'animi a participar-hi.

En cada número de la *Revista* hi haurà dos problemes proposats: un per a estudiants universitaris i un altre per als de batxillerat. Les millors solucions o les més originals apareixeran publicades en el número següent i, els guanyadors, se'ls premiarà amb una subscripció gratuïta a la *Revista* durant cinc anys.

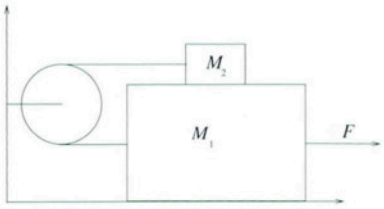
Acompanyant la solució, l'alumne ha de fer constar les dades següents: DNI, nom i cognoms, adreça postal, telèfon, adreça electrònica, nivell i centre d'estudis.

Les respostes als problemes proposats en aquest número s'han de fer arribar abans del 15 de gener de 2004 a:

probuni@fismat.ffn.ub.es (nivell universitari)
probsec@fismat.ffn.ub.es (nivell de batxillerat).

Finalment, cal dir que agrairem el fet de rebre —a les mateixes adreces electròniques— tot tipus de suggeriments i propostes per incloure en aquesta secció.

Problema per a l'alumnat de batxillerat



El sistema de la figura està inicialment en repòs. La massa M_2 (5 kg) es pot considerar puntual i es troba a 1 m de l'extrem del bloc M_1 (30 kg). El coeficient de fregament entre les dues masses val 0,3 i no hi ha fricció entre la massa M_1 i el terra. Si apliquem una força horitzontal de 100 N sobre M_1, quant temps trigarà M_2 a arribar a l'extrem de M_1? Quanta energia es perdrà per fregament?

Problema per a l'alumnat universitari

Tothom ha vist alguna vegada surar una pilota en el centre d'un corrent d'aire. La pilota flota perquè la pressió exercida pel corrent d'aire s'iguala al pes de la pilota, però la pregunta és: per què la pilota no és expulsada ràpidament pel corrent i es manté en una situació d'equilibri estable? Demostreu que quan la pilota es desvia del centre un Δx apareix una força ΔF en sentit contrari que retorna la pilota al centre del corrent.

Solució als problemes del número 24 de la *Revista*

Del problema per a l'alumnat de batxillerat

Com que no hem rebut cap resposta suficientment correcta, donem la nostra solució.

El punt de la recta que uneix els centres de la Terra i la Lluna en què el camp gravitatori és nul, ha de complir:

$$G\frac{M_T}{d^2} = G\frac{M_{LL}}{(D-d)^2},$$

on d és la distància d'aquest punt al centre de la Terra i D la distància entre els centres dels dos astres. Obtenim $d = 3{,}46 \cdot 10^8$ m.

L'energia cinètica d'arribada a la superfície terrestre d'un cos deixat anar des d'aquest punt compleix per conservació de l'energia mecànica:

$$-G\frac{M_T m}{d} - G\frac{M_{LL} m}{D-d} = Ec_1 - G\frac{M_T m}{R_T} - G\frac{M_{LL} m}{D-R_T}$$

L'energia cinètica d'arribada a la superfície terrestre del mateix cos deixat anar des del punt diametralment oposat compleix:

$$-G\frac{M_T m}{d} - G\frac{M_{LL} m}{D+d} = Ec_2 - G\frac{M_T m}{R_T} - G\frac{M_{LL} m}{D+R_T}$$

Si fem (2)−(1), obtenim:

$$\begin{aligned} Ec_2 - Ec_1 &= GM_{LL}m\left[\left(\frac{1}{D-d} - \frac{1}{D+d}\right) - \right. \\ &\quad \left.\left(\frac{1}{D-R_T} - \frac{1}{D+R_T}\right)\right] = 2,45 \cdot 10^7 \text{ J}. \end{aligned}$$

Els dos darrers termes de l'expressió anterior són negligibles.

Del problema per a l'alumnat universitari

Anomenem A_1 i B_1 els extrems del regle de longitud L_1. Segons l'enunciat del problema, la trajectòria espai-temps d'aquests punts es pot escriure com:

$$A_1 = \begin{cases} x = -L/2 \\ y = V_1\tau \\ z = 0 \\ t = \tau \end{cases} \qquad B_1 = \begin{cases} x = L/2 \\ y = V_1\tau \\ z = 0 \\ t = \tau \end{cases}$$

Per als extrems del forat de longitud L_2, anomenats A_2 i B_2, podem escriure les trajectòries:

$$A_2 = \begin{cases} x = -L/2 + V_2\tau \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = \tau \end{cases} \qquad B_2 = \begin{cases} x = L/2 + V_2\tau \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = \tau \end{cases}$$

on τ és un paràmetre utilitzat per escriure les trajectòries.

Es pot veure fàcilment que en $\tau = 0$ les trajectòries A_1 i A_2 es tallen en el punt $x = -L/2$, i les trajectòries B_1 i B_2 es tallen en el punt $x = L/2$.

Observador comòbil amb el regle

Aplicant la transformació de Lorentz amb velocitat V_1 en l'eix de les y,

$$x' = x,\ y' = \gamma(y - V_1\,t),\ z' = z,\ t' = \gamma(t - V_1\,y)$$

on

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V_1^2}}$$

Hem pres c = 1 per simplificar la notació. Les trajectòries per a un observador comòbil amb el regle queden de la manera següent:

$$A_1 = \begin{cases} x' = -L/2 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \\ t' = \tau/\gamma \end{cases} \qquad B_1 = \begin{cases} x' = L/2 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \\ t' = \tau/\gamma \end{cases}$$

$$A_2 = \begin{cases} x' = -L/2 + V_2\tau \\ y' = -\gamma\,V_1\tau \\ z' = 0 \\ t' = \gamma\,\tau \end{cases} \qquad B_2 = \begin{cases} x' = L/2 + V_2\tau \\ y' = -\gamma\,V_1\tau \\ z' = 0 \\ t' = \gamma\,\tau \end{cases}$$

Les trajectòries A_1 i A_2 es creuen en $t' = 0$ en el punt $x' = -L/2$, i les trajectòries B_1 i B_2 es creuen en el mateix $t' = 0$ en el punt $x' = L/2$. Per a aquest observador el forat s'apropa al regle paral·lel a l'eix de les x, amb velocitat

$$\vec{V}' = \left(\frac{V_2}{\gamma}, -V_1, 0\right).$$

Observador comòbil amb el forat

Aplicant la transformació de Lorentz amb velocitat V_2 en l'eix de les x,

$$x' = \gamma(x - V_2\,t),\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \gamma(t - V_2\,x)$$

on

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V_2^2}}.$$

Les trajectòries per a un observador comòbil amb el forat queden així:

$$A_1 = \begin{cases} x' = -\gamma\,L/2 - \gamma\,V_2\tau \\ y' = V_1\tau \\ z' = 0 \\ t' = \gamma\,\tau + \gamma\,V_2\,L/2 \end{cases}$$

$$B_1 = \begin{cases} x' = \gamma\,L/2 - \gamma\,V_2\tau \\ y' = V_1\tau \\ z' = 0 \\ t' = \gamma\,\tau - \gamma\,V_2\,L/2 \end{cases}$$

$$A_2 = \begin{cases} x' = -\gamma\,L/2 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \\ t' = \tau/\gamma + \gamma\,V_2\,L/2 \end{cases}$$

$$B_2 = \begin{cases} x' = \gamma\,L/2 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \\ t' = \tau/\gamma - \gamma\,V_2\,L/2 \end{cases}$$

Les trajectòries A_1 i A_2 es creuen en $t' = \gamma\,V_2\,L/2$ en el punt $x' = -\gamma\,L/2$, i les trajectòries B_1 i B_2 es creuen en $t' = -\gamma\,V_2\,L/2$ en el punt $x' = \gamma\,L/2$. Per a aquest observador el regle s'apropa al forat inclinat amb velocitat

$$\vec{V}' = \left(-V_2, \frac{V_1}{\gamma}, 0\right).$$

Per determinar la inclinació del regle, ens fixarem en la posició de A_1 i de B_1 en l'instant $t' = 0$:

$$\vec{A}(t' = 0) = \left(-\frac{L}{2\gamma}, -V_1 V_2 \frac{L}{2}, 0\right)$$

$$\vec{B}_1(t' = 0) = \left(\frac{L}{2\gamma}, V_1 V_2 \frac{L}{2}, 0\right).$$

Observador general

Tots els observadors veuran passar el regle just pel forat.

A_1 i A_2 són dues trajectòries a l'espaitemps que es creuen en un punt i seguiran creuant-se per a tota transformació de Lorentz. Per tant, aquest fet és independent de l'observador. Per a les trajectòries B_1 i B_2 passa el mateix.

Llavors, tots els observadors veuran apropar-se el regle al forat amb diferents angles i velocitats, segons l'observador, però sempre veuran passar l'extrem A del regle just per l'extrem A del forat i l'extrem B del regle just per l'extrem B del forat. I per tant el regle passa just pel forat per a tots els observadors possibles.